Curso 2020-21. (Entrega de evaluación continua)

Sea V el espacio vectorial de las matrices de orden 5×1 con coeficientes en Q, el cuerpo de los números racionales, y W = $\{X \in M_{5\times1}(Q) : AX=0\}$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$ Se pide:

(1) Demostrar que W es subespacio vectorial de V.

(2) Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de W.

(3) Ampliar la base de W obtenida en el apartado (2) hasta una base, B, de V.

(4) Razonar si la matriz $X=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$ es un vector de W. En caso afirmativo, calcular sus coordenadas respecto de la base de W (del apartado (2)y también respecto de la base, B, de V (del apartado (3)).

$W \subseteq V,\ V \neq \emptyset\ (0 \in V)$.

W subespacio de $V \iff \left.\begin{array}{l}\forall \alpha, \beta \in K = Q \\ \wedge \\ \forall u, w \in W\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha u + \beta w \in W$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha, \beta \in Q \\ \bar{x}_1 \in W \iff A\bar{x}_1 \overset{(1)}{=} 0 \\ \bar{x}_2 \in W \iff A\bar{x}_2 \overset{(2)}{=} 0\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2}_{\bar{x}\, \in M_{5\times1}(Q)} \overset{?}{\in} W \text{ y } A\bar{x} \overset{?}{=} 0$$

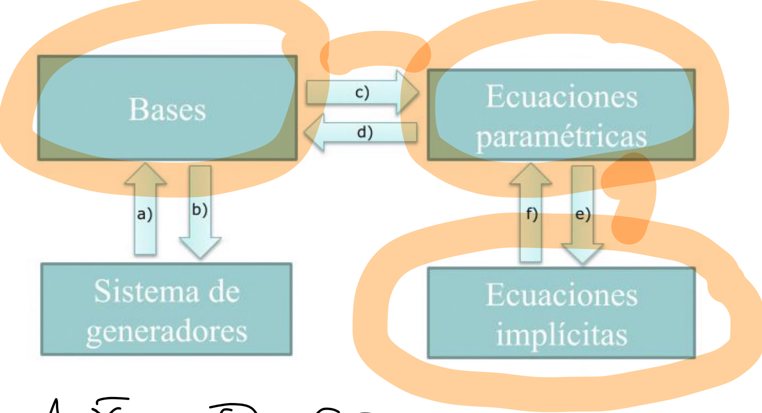
$$A\bar{x} = A(\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2) = \alpha(\underline{A\bar{x}_1}) + \beta(\underline{A\bar{x}_2}) \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

Así W es subesp. vect. de V

Curso 2020-21. (Entrega de evaluación continua)

Sea V el espacio vectorial de las matrices de orden 5×1 con coeficientes en Q, el cuerpo de los números racionales, y $W = \{X \in M_{5\times 1}(Q) : AX=0\}$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$ Se pide:



(2) Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de W.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)_{B_C}\ ; \quad X\in W \iff AX=0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l}x_1 = 0\\ \cancel{0 = 0}\\ 2x_2 = 0\\ \cancel{x_1+2x_2 = 0}\\ x_4+x_5=0\end{array}\right\} \text{L. indep} \Longrightarrow rg(A)=3$$

$$\boxed{\begin{array}{l}x_1=0\\2x_2=0\\x_4+x_5=0\end{array}}$$

Ec. implícita de W

$x_3=\alpha$ $\quad x_5=\beta$

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$$

$$\left.\begin{array}{l}x_1=0\\2x_2=0\\x_4=-x_5\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll}x_1=0 & 0 & 0\\x_2=0 & 0 & 0\\x_3=1\alpha & 0 & \\x_4=0 & -1\beta & \\x_5=0 & 1\beta & \end{array}\right\}$$

Ec. param. de W

$$\boxed{B_W=\{w_1,w_2\}}\ , \quad w_1=(0,0,1,0,0)_{B_C}, \quad w_2=(0,0,0,-1,1)_{B_C}$$

Base, dim W = 2

Curso 2020-21. (Entrega de evaluación continua)

Sea V el espacio vectorial de las matrices de orden 5×1 con coeficientes en Q, el cuerpo de los números racionales, y W = $\{X \in M_{5\times1}(Q) : AX=0\}$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$. Se pide:

(3) Ampliar la base de W obtenida en el apartado (2) hasta una base, B, de V.

$$B_c=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_2},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_3},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_4},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_5}\right\}$$

$B_W=\{w_1,w_2\}$

$w_1=(0,0,1,0,0)_{B_c}$

$w_2=(0,0,0,-1,1)_{B_c}$

$\dim V=5$

$\Longrightarrow B_V=\{w_1,w_2,?,?,?\}$

B_V es base $\overset{\dim V=5}{\Longleftrightarrow}$ B_V es lin indep $\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{vmatrix}\neq 0\\ \begin{array}{ccccc}w_1&w_2&e_4&e_1&e_2\end{array}\end{array}$$

$$\boxed{B_V=\{w_1,w_2,e_4,e_1,e_2\}\ \text{base de } V}$$

Curso 2020-21. (Entrega de evaluación continua)

Sea V el espacio vectorial de las matrices de orden 5×1 con coeficientes en Q, el cuerpo de los números racionales, y W = {X ∈ $M_{5\times1}(Q)$: AX=0} siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

Ec. implícitas

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ 2x_2=0 \\ x_4+x_5=0 \end{array}\right\}$$

$B_W=\{w_1,w_2\}$

$w_1=(0,0,1,0,0)_{B_C}$

$w_2=(0,0,0,-1,1)_{B_C}$

(4) Razonar si la matriz $X=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$ es un vector de W. En caso afirmativo, calcular sus coordenadas respecto de la base de W (del apartado (2)) y también respecto de la base, B, de V (del apartado (3)).

- $X\in W \Leftrightarrow AX=0 \Longleftrightarrow X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)_{B_C}$ verifica las ec. implícitas

$X=(0,0,2,-1,1)_{B_C}$

$\quad\ \ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ 2x_2=0 \\ x_4+x_5=-1+1=0 \end{array}\right\} \boxed{X\in W}$$

- $\boxed{x=x_1w_1+x_2w_2}$

$(0,0,2,-1,1)=x_1(0,0,1,0,0)+x_2(0,0,0,-1,1)=(x_1,x_2)_{B_W}$

$$\left.\begin{array}{l} 0=0 \\ 0=0 \\ 2=x_1 \\ -1=-x_2 \\ 1=x_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=1 \end{array}}$$

$$\boxed{X=(2,1)_{B_W}}$$

Curso 2020-21. (Entrega de evaluación continua)

Sea V el espacio vectorial de las matrices de orden 5×1 con coeficientes en Q, el cuerpo de los números racionales, y W = {X ∈ $M_{5\times1}(Q)$: AX=0} siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$ Se pide:

$B_W = \{w_1, w_2\} \Longrightarrow B_V = \{w_1, w_2, e_4, e_1, e_2\}$

$w_1 = (0,0,1,0,0)_{B_C}$

$w_2 = (0,0,0,-1,1)_{B_C}$

(4) Razonar si la matriz $X=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$ es un vector de W. En caso afirmativo, calcular sus coordenadas respecto de la base de W (del apartado (2)) y también respecto de la base, B, de V (del apartado (3)).

$X = (2,1)_{B_W} \Longrightarrow X = 2w_1 + w_2 = 2w_1 + w_2 + 0e_4 + 0e_1 + 0e_2 = (2,1,0,0,0)_{B_V}$

$x = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 e_4 + x_4 e_1 + x_5 e_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_{B_V}$

$(0,0,2,-1,1) = x_1(0,0,1,0,0) + x_2(0,0,0,-1,1) + x_3(0,0,0,1,0) + x_4(1,0,0,0,0) + x_5(0,1,0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_4 \\ 0 &= x_5 \\ 2 &= x_1 \\ -1 &= -x_2 + x_3 \\ 1 &= x_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$x = (2,1,0,0,0)_{B_V}$